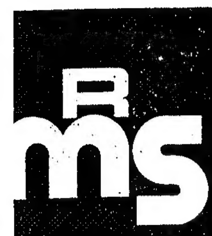
e Année (1974-1975) Septembre 1974 N° 1



REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Sujets donnés aux concours d'Agrégation et aux concours d'entrée aux grandes Écoles en 1974

N.D.L.R. — Pour permettre à ce numéro de la Revue de présenter un éventail des concours aussi large que possible, nous avons dû renoncer à faire paraître le sujet de certaines épreuves. Nos lecteurs voudront bien nous en excuser.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Composition de mathématiques générales.

6057. NOTATIONS. — Dans les première, troisième et quatrième parties on désigne par K un corps commutatif de caractéristique différente de 2; dans la deuxième partie le corps de base est **R**; dans la cinquième partie le corps de base est **C**.

Si E désigne un K-espace vectoriel, l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension donnée r est noté $\mathscr{G}_r(E)$; le sous-espace vectoriel engendré par une partie donnée A de E est noté $\mathscr{V}(A)$; le groupe linéaire de E est noté $GL_K(E)$.

AVERTISSEMENT. — Les troisième, quatrième et cinquième parties sont indépendantes de la deuxième.

PREMIÈRE PARTIE.

Soit V un K-espace vectoriel de dimension 4, et soit p un entier $\geqslant 2$; on note Λ'_p le K-espace vectoriel des formes p-linéaires et alternées sur V, et Λ_p le dual de Λ'_p. Donner la dimension de Λ_2, et celle de Λ_4.

A deux éléments quelconques x, y de V on associe l'élément de Λ_2, noté $x \wedge y$, défini par

$$[\forall f \in \Lambda'_2] \qquad [(x \wedge y)(f) = f(x, y)].$$

I. — 1° Prouver que l'application $(x, y) \longmapsto x \wedge y$ est bilinéaire alternée de $V \times V$ dans Λ_2. L'image de cette application est notée $\mathscr{D}$.

I. — 2° Soit $\alpha = x_1 \wedge x_2$ un élément non nul de $\mathscr{D}$. Montrer que les solutions dans $V \times V$ de l'équation $x \wedge y = \alpha$ sont les couples $(x = \lambda x_1 + \lambda' x_2, y = \mu x_1 + \mu' x_2)$, avec $(\lambda, \lambda', \mu, \mu') \in K^4$ et $\lambda\mu' - \lambda'\mu = 1$.

Comparer $\mathscr{V}(x, y)$ et $\mathscr{V}(x_1, x_2)$. En déduire une bijection naturelle δ de $\mathscr{G}_2(V)$ sur l'ensemble des droites vectorielles de Λ_2 contenues dans $\mathscr{D}$.

I. — 3° Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base ordonnée de V.

Montrer que la famille $\tilde{\mathscr{B}} = (e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4, e_4 \wedge e_2, e_2 \wedge e_3)$ est une base ordonnée de Λ_2.

Expliciter les coordonnées de $x \wedge y$ dans la base $\tilde{\mathscr{B}}$ lorsque x et y sont donnés par leurs coordonnées $(\xi_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ et $(\eta_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ dans la base $\mathscr{B}$.

DEUXIÈME PARTIE.

Dans cette partie, l'espace $\mathbf{R}^3$ est muni de l'orientation et de la structure euclidienne dans lesquelles la base canonique est directe et orthonormale. La notation $u \wedge v$ (resp. $u.v$) désigne le produit vectoriel (resp. le produit scalaire) dans cet espace.

Soit E_4 le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$, d'élément générique $\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix}$ et E_6 le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$, d'élément générique $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$.

On définit sur E_4 l'opération $\top$, à valeurs dans E_6, par $\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} \top \begin{pmatrix} b \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ay - bx \\ x \wedge y \end{bmatrix}$ et l'on appelle cône $\mathscr{C}$ l'ensemble des composés ainsi obtenus dans E_6.

II. — 1° Démontrer $\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \mathscr{C}\right) \Longleftrightarrow (u.v = 0)$.

II. — 2° Soit p un élément donné de $\mathbf{R}^3$. Montrer que l'image H de l'application de $\mathbf{R}^3$ dans E_6, définie par $u \longmapsto \begin{bmatrix} u \\ p \wedge u \end{bmatrix}$, est un sous-espace vectoriel de E_6 contenu dans $\mathscr{C}$.

Soit m un élément donné de $\mathbf{R}^3$. Montrer que l'image L de l'application de $\mathbf{R}^3$ dans E_6, définie par $v \longmapsto \begin{bmatrix} v \wedge m \\ v \end{bmatrix}$, est un sous-espace vectoriel de E_6 contenu dans $\mathscr{C}$.

Montrer que tout élément de L est le composé de deux éléments de E_4 de la forme $\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix}$ avec $a = m.x$.

II. — 3° On se propose d'étudier tous les sous-espaces vectoriels de E_6 de dimension trois, contenus dans $\mathscr{C}$. Lorsque $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ décrit un tel sous-espace W, u décrit un sous-espace vectoriel $s(\mathrm{W})$ et v décrit un sous-espace vectoriel $t(\mathrm{W})$.

a) Si $t(\mathrm{W})$ est de dimension 3, montrer qu'à toute base orthonormée directe (i, j, k) de $\mathbf{R}^3$ correspondent des réels, a, b, c et un sous-espace vectoriel F de E_4 vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $$\mathrm{F} = \mathscr{V}\left(\begin{pmatrix} a \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ k \end{pmatrix}\right);$$

(ii) W est l'ensemble des composés des éléments de F deux à deux.

b) Reprendre l'étude dans le cas où $t(\mathrm{W})$ est de dimension 1, en cherchant F de la forme

$$\mathscr{V}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ k \end{pmatrix}\right)$$

et vérifiant (ii).

c) Examiner le cas où $t(\mathrm{W})$ est de dimension paire et $s(\mathrm{W})$ de dimension 3.

TROISIÈME PARTIE.

On reprend ici l'étude générale amorcée à la première partie.

III. — 1° Soit α, β des éléments de $\mathscr{D}$ et $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ des éléments de V tels que $x_1 \wedge x_2 = \alpha$ et $x_3 \wedge x_4 = \beta$. Soit φ un élément de Λ_4'; montrer que le scalaire $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ne dépend que de α et β; on le note $\overline{\varphi}(\alpha, \beta)$. On désigne par $\alpha \vee \beta$ la forme linéaire sur Λ_4' telle que

$$[\forall \varphi \in \Lambda_4'] \quad [(\alpha \vee \beta)(\varphi) = \overline{\varphi}(\alpha, \beta)].$$

Établir que l'application $(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha \vee \beta$ de $\mathscr{D} \times \mathscr{D}$ dans Λ_4 se prolonge de façon unique en une application bilinéaire symétrique de $\Lambda_2 \times \Lambda_2$ dans Λ_4, que l'on écrira encore $(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha \vee \beta$.

III. — 2° Soit $\mathscr{B}$ une base ordonnée de V et $\tilde{\mathscr{B}}$ la base de Λ_2 associée à $\mathscr{B}$ (notations de I, 3°). On définit l'élément $e \in \Lambda_4$ par $[\forall \varphi \in \Lambda_4']\ [e(\varphi) = \varphi(e_1, e_2, e_3, e_4)]$; (e) est une base de Λ_4. Soit $q_{\mathscr{B}}$ la forme bilinéaire symétrique sur Λ_2 qui, à tout couple $(\alpha, \beta) \in \Lambda_2 \times \Lambda_2$, associe la coordonnée de $\alpha \vee \beta$ sur e.

Écrire la matrice de $q_{\mathscr{B}}$ dans la base $\tilde{\mathscr{B}}$. Quel est le rang de $q_{\mathscr{B}}$? Lorsque $\mathrm{K} = \mathbf{R}$, quelle est la signature de $q_{\mathscr{B}}$? Reprenant K quelconque, soit $\mathscr{B}'$ une autre base de V. Quelle relation y a-t-il entre $q_{\mathscr{B}}$ et $q_{\mathscr{B}'}$?

III. — 3° Soit α un élément de Λ_2. Démontrer $[\alpha \in \mathscr{D}] \Longleftrightarrow [\alpha \vee \alpha = 0]$.

III. — 4° Un sous-espace vectoriel de Λ_2 sera dit *$\mathscr{D}$-isotrope* s'il est contenu dans $\mathscr{D}$. Soit α, β deux éléments linéairement indépendants de Λ_2, et $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ des éléments de V tels que $x_1 \wedge x_2 = \alpha$ et $x_3 \wedge x_4 = \beta$.

a) Montrer que, pour que $\mathscr{V}(\alpha, \beta)$ *ne soit pas* $\mathscr{D}$-isotrope, il faut et il suffit que les plans $\mathscr{V}(x_1, x_2)$ et $\mathscr{V}(x_3, x_4)$ soient des sous-espaces supplémentaires de V.

b) Montrer que si $\mathscr{V}(\alpha, \beta)$ est $\mathscr{D}$-isotrope, on peut trouver trois éléments x, x', x'' de V tels que $x \wedge x' = \alpha$ et $x \wedge x'' = \beta$.

QUATRIÈME PARTIE.

On désigne par Ω le groupe des automorphismes $u \in GL_K(\Lambda_2)$ tels que

$$[\forall\alpha \in \Lambda_2]\ [\forall\beta \in \Lambda_2]\ [u(\alpha) \vee u(\beta) = \alpha \vee \beta]$$

et par G le sous-groupe des $u \in \Omega$ tels que $\det(u) = 1$.

Un sous-espace vectoriel E de Λ_2 est dit *$\mathscr{D}$-isotrope maximal* si la relation « F est un sous-espace $\mathscr{D}$-isotrope et $E \subset F$ » implique : « $E = F$ ».

IV. — 1° *a)* Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ une base de V; prouver que pour tout $i (1 \leqslant i \leqslant 4)$, les sous-espaces $H_i(\mathscr{B}) = \mathscr{V}((e_i \wedge e_j)_{j \neq i})$ et $L_i(\mathscr{B}) = \mathscr{V}((e_j \wedge e_k)_{j \neq i,\, k \neq i})$ sont $\mathscr{D}$-isotropes maximaux.

b) Soit E un sous-espace $\mathscr{D}$-isotrope de dimension 3. Montrer que l'on est dans l'un des cas suivants :

(1) E est de la forme $H_i(\mathscr{B})$,

(2) E est de la forme $L_i(\mathscr{B})$,

et que ces cas s'excluent mutuellement.

On appelle $\mathscr{H}$ l'ensemble des sous-espaces $\mathscr{D}$-isotropes qui relèvent du cas (1), et $\mathscr{L}$ l'ensemble de ceux qui relèvent du cas (2).

IV. — 2° Montrer que tout sous-espace $\mathscr{D}$-isotrope est contenu dans un sous-espace élément de $\mathscr{H}$ ou de $\mathscr{L}$.

IV. — 3° *a)* Pour tout élément $d \in \mathscr{G}_1(V)$, on note H_d l'ensemble des $x \wedge y$, où x parcourt d et où y parcourt V; prouver que $d \longmapsto H_d$ est une bijection de $\mathscr{G}_1(V)$ sur $\mathscr{H}$.

Pour tout élément $\Pi \in \mathscr{G}_3(V)$, on note L_Π l'ensemble des $x \wedge y$, où (x, y) parcourt $\Pi \times \Pi$; prouver que $\Pi \longmapsto L_\Pi$ est une bijection de $\mathscr{G}_3(V)$ sur $\mathscr{L}$.

b) Soit E et E′ deux sous-espaces $\mathscr{D}$-isotropes distincts de dimension 3; prouver que, pour que E et E′ soient tous deux éléments de $\mathscr{H}$, ou tous deux éléments de $\mathscr{L}$, il faut et il suffit que $\dim_K(E \cap E') = 1$.

Que se passe-t-il lorsque $E \in \mathscr{H}$ et $E' \in \mathscr{L}$?

IV. — 4° *a)* Soit ω un automorphisme de V, et soit $\tilde{\omega}$ l'unique automorphisme de Λ_2 tel que

$$[\forall x \in V]\ [\forall y \in V] \qquad [\tilde{\omega}(x \wedge y) = \omega(x) \wedge \omega(y)].$$

Justifier brièvement l'existence de $\tilde{\omega}$; calculer $\det(\tilde{\omega})$ en fonction de $\det(\omega)$.

b) Soit $GL_K^2(V)$ le sous-groupe de $GL_K(V)$ formé des automorphismes dont le déterminant *est un carré* dans K :

$$[\forall\omega \in GL_K^2(V)]\quad [\exists r \in K]\quad [\det(\omega) = r^2].$$

Prouver que $r^{-1}\tilde{\omega} \in G$.

IV. — 5° *a)* Soit M_1 et M_2 deux sous-espaces $\mathscr{D}$-isotropes maximaux de Λ_2; montrer que si $M_1 \in \mathscr{H}$ et $M_2 \in \mathscr{H}$, ou si $M_1 \in \mathscr{L}$ et $M_2 \in \mathscr{L}$, il existe $u \in G$ tel que $u(M_1) = M_2$; montrer que si $M_1 \in \mathscr{H}$ et $M_2 \in \mathscr{L}$, il existe $u \in \Omega$ tel que $u(M_1) = M_2$.

b) Chaque $u \in \Omega$ induit une bijection de l'ensemble $\mathscr{H} \cup \mathscr{L}$ sur lui-même; on note G′ le sous-groupe des $u \in \Omega$ pour lesquels cette bijection laisse stable chacun des ensembles $\mathscr{H}$ et $\mathscr{L}$. Prouver que G′ est un sous-groupe d'indice 2 de Ω.

IV. — 6° *a)* Soit u un élément de G′. Montrer l'existence de $\omega \in GL_K^2(V)$ et de $r \in K$ tels que $r^{-1}\tilde{\omega} = u$ et $\det(\omega) = r^2$.

En déduire que l'on a $G' = G$.

b) Soit J le sous-groupe distingué de G égal à $\{Id, -Id\}$, où Id désigne l'application identique de Λ_2. Pour tout $\omega \in GL_K^2(V)$, on note $\hat{\omega}$ la classe modulo (J) de $r^{-1}\tilde{\omega}$, classe qui ne dépend que de ω (et non du scalaire r tel que $\det(\omega) = r^2$). Établir que $\omega \longmapsto \hat{\omega}$ est un homomorphisme surjectif du groupe $GL_K^2(V)$ sur le groupe quotient G/J : préciser le noyau de cet homomorphisme.

CINQUIÈME PARTIE.

Dans cette dernière partie, où l'on suppose $K = \mathbf{C}$, on conserve les notations V et Λ_2 des première, troisième et quatrième parties et l'on appelle $\mathscr{P}(V)$ et $\mathscr{P}(\Lambda_2)$ les espaces projectifs respectivement issus de V et de et de Λ_2.

V. — 1° La bijection δ du I, 2°, induit une bijection Δ de l'ensemble des *droites projectives* de $\mathscr{P}(V)$ sur l'ensemble D des points de $\mathscr{P}(\Lambda_2)$ issus des droites vectorielles de Λ_2 contenues dans $\mathscr{D}$. Vérifier que D est une *quadrique propre* de $\mathscr{P}(\Lambda_2)$.

Interpréter dans le langage de la géométrie projective les résultats des questions IV, 1°, 2°, 3°.

V. — 2° On donne une *conique propre* Γ tracée sur D, dont le plan est noté $P(\Gamma)$. Montrer qu'en général l'application Δ^{-1} envoie Γ sur l'ensemble des génératrices de l'un des deux systèmes d'une quadrique propre $Q(\Gamma)$ dans $\mathscr{P}(V)$. Quels sont les cas d'exception? Que se passe-t-il alors?

V. — 3° *a*) Soit Γ_1 et Γ_2 deux coniques propres distinctes tracées sur D, telles que les quadriques $Q(\Gamma_1)$ et $Q(\Gamma_2)$ soient propres. Montrer que l'on a $Q(\Gamma_1) = Q(\Gamma_2)$ si, et seulement si, les plans $P(\Gamma_1)$ et $P(\Gamma_2)$ sont des sous-espaces *conjugués* par rapport à D. Réciproquement, prouver que toute quadrique propre de $\mathscr{P}(V)$ est de la forme $Q(\Gamma)$.

b) Soit S une variété linéaire projective de dimension 3 dans $\mathscr{P}(\Lambda_2)$, rencontrant D suivant une *quadrique propre* Σ de S. Montrer qu'il existe deux droites d_1 et d_2 non coplanaires dans $\mathscr{P}(V)$ telles que $\Delta^{-1}(\Sigma)$ soit l'ensemble des droites de $\mathscr{P}(V)$ rencontrant d_1 et d_2. Réciproque.

Composition d'analyse.

Dans ce qui suit α désigne un nombre réel donné une fois pour toutes et tel que $\alpha > -\frac{1}{2}$. Toutes les fonctions considérées sont à valeurs dans le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Pour simplifier l'écriture on convient que dans une intégrale du type $\int_{-1}^{1} F(x)\,(1-x^2)^\alpha\,dx$, on remplacera le symbole $(1-x^2)^\alpha\,dx$ par $d\sigma(x)$; on écrira ainsi cette intégrale $\int_{-1}^{1} F(x)\,d\sigma(x)$.

Si f et g sont deux fonctions continues sur l'intervalle fermé $I = [-1, 1]$, on pose

$$(f\,|g) = \int_{-1}^{1} f(x)\,\overline{g(x)}\,d\sigma(x).$$

PREMIÈRE PARTIE.

I. — A) Pour toute fonction f deux fois dérivable sur I on pose

$$(Lf)(x) = (1-x^2)f''(x) - 2(\alpha+1)xf'(x); \qquad |x| \leqslant 1.$$

1° Montrer que si f et g sont deux fois continûment dérivables sur I, on a $(Lf\,|g) = (f\,|Lg)$.

2° Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit E_n l'ensemble des restrictions à I des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n. On convient des abus de notation suivants :

— un polynôme et la fonction qu'il définit, ainsi que la restriction de celle-ci à I, sont désignés par le même symbole;

— pour tout entier $s \geqslant 0$, on note x^s la fonction $x \longmapsto x^s$, $(|x| \leqslant 1)$.

Ceci étant, montrer : $L(E_n) \subset E_n$. En déduire que si P est un polynôme de degré n tel que $(x^s|P) = 0$ pour $0 \leqslant s \leqslant n-1$, alors $LP + \lambda_n P = 0$, où λ_n est un nombre réel qu'on déterminera.

3° On pose $P_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{2^n(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}(1-x^2)^{-\alpha}\dfrac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^{n+\alpha}]$.

Montrer que P_n est un polynôme de degré n.

Vérifier

$$\begin{cases} P_n(1) = 1, \\ (P_n|P_m) = 0 \quad \text{si } n \neq m, \\ LP_n + \lambda_n P_n = 0. \end{cases}$$

I. — B) Pour tout $(a, \lambda) \in \mathbf{R}^2$, le symbole a_+^λ représente le réel égal à 0 si $a \leqslant 0$, égal à a^λ si $a > 0$. Si x, y et z sont des points de $\mathring{I} =]-1, 1[$, on pose $H(x, y, z) = \dfrac{(1-x^2-y^2-z^2+2xyz)_+^{\alpha-1/2}}{(1-x^2)^\alpha(1-y^2)^\alpha(1-z^2)^\alpha}$.

d'une même famille ont exactement un point commun, tandis que deux plans des deux familles se rencontrent suivant une droite ou ne se rencontrent pas. Le groupe $PO(q)$ opère fidèlement sur $\zeta_1 \cup \zeta_2$; les éléments de $PO(q)\setminus PSO(q)$ *échangent* ζ_1 et ζ_2, tandis que $PSO(q)$ opère fidèlement et transitivement sur chacun des ensembles ζ_1 et ζ_2, et n'opère pas transitivement sur $\zeta_1 \cup \zeta_2$.

b) Si ζ_1 et ζ_2 sont numérotés convenablement : un plan $P \in \zeta_1$ est l'image, par Δ, de l'ensemble des droites de $\mathscr{P}(V)$ passant par un point bien déterminé, tandis qu'un plan $P \in \zeta_2$ est l'image, par Δ, de l'ensemble des droites de $\mathscr{P}(V)$ contenues dans un plan bien déterminé; Δ induit ainsi une bijection f de $\mathscr{P}(V)$ sur ζ_1 et une bijection f^* de $\mathscr{P}^*(V)$ sur ζ_2.

A l'aide de la bijection f, un élément $u \in PSO(q)$ peut donc être interprété comme une *bijection* $\hat{u}$ *de l'espace projectif* $\mathscr{P}(V)$ *sur lui-même*, et, à l'aide de f^*, comme une bijection $\hat{u}^*$ de $\mathscr{P}^*(V)$ sur lui-même. La définition de Δ montre immédiatement que $\hat{u}$ et $\hat{u}^*$ *respectent l'incidence*, d'où il suit que $\hat{u}$ conserve l'alignement et est une collinéation. Finalement $u \longmapsto \hat{u}$ réalise un *isomorphisme de* $PSO(q)$ *sur un groupe* g *de collinéations de* $\mathscr{P}(V)$. Que g soit en fait le groupe $PGL^s_K(V)$, c'est l'un des objets du problème que de le prouver en détail.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Concours de 1974.

6057. Énoncé résumé : **Algèbre extérieure d'un espace vectoriel de dimension 4. Correspondance entre les droites d'un espace projectif complexe de dimension 3 et une quadrique propre d'un espace projectif complexe de dimension 5. Isomorphismes de groupes remarquables.**

(Voir l'énoncé complet dans la *Revue* n° 1, page 1.)

Première partie.

On sait que $\dim \Lambda'_p = \dim \Lambda_p = C^p_4$, d'où $\dim \Lambda_2 = 6$, $\dim \Lambda_4 = 1$ [considérer une base évidente formée de formes indépendantes à partir d'une partie ordonnée naturellement d'une base (e_1, e_2, e_3, e_4)].

I. — 1° Immédiat à partir de la définition. (Ne pas oublier de vérifier la cohérence de la définition de α.)

I. — 2° Si $x \notin \mathscr{V}(x_1, x_2)$, considérons une base (x_1, x_2, x, z) ce qui est possible puisque (x_1, x_2) est libre; en posant $y = \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 x + \eta_4 z$, $f \in \Lambda_2$ définie par

$$f(x_1, x_2) = 1, \qquad f(x_1, x) = f(x_1, z) = f(x_2, x) = f(x_2, z) = f(x, z) = 0,$$

on a

$$\alpha(f) = f(x, y) = 0 \neq f(x_1, x_2) = \alpha(f),$$

ce qui est absurde. Donc

$$x \in \mathscr{V}(x_1, x_2), \qquad y \in \mathscr{V}(x_1, x_2), \qquad x = \lambda x_1 + \lambda' x_2, \qquad y = \mu x_1 + \mu' x_2$$

et, $\forall f \in \Lambda'_2$: $\alpha(f) = (x \wedge y)(f) = (\lambda\mu' - \lambda'\mu)\alpha(f)$, soit $\lambda\mu' - \lambda'\mu = 1$ (et réciproquement). Par suite

$$\mathscr{V}(x_1, x_2) = \mathscr{V}(x, y).$$

Posons $\delta(\mathscr{V}(x, y)) = K(x \wedge y)$.

Soit $W \in \mathscr{G}_2(V)$, (x, y) une base de W, $\alpha = x \wedge y \neq 0$ (car si (x, y, z, t) est une base de V,

$$f : (u, v) \longmapsto \det(u, v, z, t)$$

est telle que $\alpha(f) = 1$); toute autre base (x', y') est telle que

$$x' = \lambda x + \lambda' y, \qquad y' = \mu x + \mu' y, \qquad \alpha' = x' \wedge y' = (\lambda\mu' - \lambda'\mu)\alpha \neq 0,$$

d'où $K\alpha = K\alpha' \in \mathscr{D}$. δ est surjective car $K(x \wedge y) = \delta(\mathscr{V}(x, y))$; δ est injective car

$$\begin{aligned}\delta(\mathscr{V}(x, y)) = \delta(\mathscr{V}(x', y')) &\Longleftrightarrow K\alpha = K\alpha' \Longleftrightarrow \alpha' = \rho\alpha, \qquad \rho \neq 0\\ &\Longleftrightarrow x' = \rho(\lambda x + \lambda' y), \quad y' = \mu x + \mu' y, \qquad \lambda\mu' - \lambda'\mu = 1.\end{aligned}$$

δ est naturelle car indépendante de tout choix de bases; δ est d'ailleurs transportée immédiatement si l'on substitue à V un espace isomorphe V'.

I. — 3° $\tilde{\mathscr{B}}$ est la base duale de la base (φ_{ij}) telle que $\varphi_{ij}(e_k, e_l) = \delta_{ik}\delta_{jl}$ pour (k, l) et (i, j) éléments de $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 4), (4, 2), (2, 3)\}$. Posons $x = \sum_i \xi_i e_i$, $y = \sum_j \eta_j e_j$, $f \in \Lambda_2'$:

$$(x \wedge y)(f) = \sum_{(i,j)} (\xi_i\eta_j - \xi_j\eta_i)(e_i \wedge e_j)(f) \quad \text{pour les } (i, j) \text{ ci-dessus,}$$

ce qui prouve que tout élément de $\mathscr{D}$ est combinaison linéaire d'éléments de $\tilde{\mathscr{B}}$. Les coordonnées cherchées sont donc

$$\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1, \quad \xi_1\eta_3 - \xi_3\eta_1, \quad \xi_1\eta_4 - \xi_4\eta_1, \quad \xi_3\eta_4 - \xi_4\eta_3, \quad \xi_4\eta_2 - \xi_2\eta_4, \quad \xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2.$$

(Notons que l'application $\mathscr{B} \longmapsto \tilde{\mathscr{B}}$ n'est pas injective.)

DEUXIÈME PARTIE.

II. — 1° $(ay - bx).(x \wedge y) = 0$. *Réciproquement,* si $u \neq 0$, on peut prendre $a = 1$, $b = 0$, $x = \dfrac{u \wedge v}{\|u\|^2}$, $y = u$; si $u = 0$, on peut prendre $a = b = 0$ et $v = x \wedge y$, ce qui est toujours possible; c'est trivial si $v = 0$, et résulte des égalités suivantes si $v \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ b \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ b \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

II. — 2° Le début est trivial (notamment $u.(p \wedge u) = (v \wedge m).v = 0$). On a vu précédemment que l'équation $x \wedge y = v$ admet toujours des solutions. Dès lors,

$$\begin{pmatrix} m.x \\ x \end{pmatrix} \top \begin{pmatrix} m.y \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (m.x)y - (m.y)x \\ x \wedge y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \wedge (y \wedge x) \\ x \wedge y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \wedge m \\ v \end{bmatrix}.$$

II. — 3° *a*) Soit $\left(\begin{bmatrix} x \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ j \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z \\ k \end{bmatrix}\right)$ une base de W, où (i, j, k) est une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$ (obtenue par exemple par le procédé de Schmidt). Alors

$$\forall(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbf{R}^3, \quad (\lambda x + \mu y + \nu z).(\lambda i + \mu j + \nu k) = 0,$$

d'où $x.i = y.j = z.k = 0$. Il suffit alors de poser

$$a = z.j = -y.k, \quad b = x.k = -z.i, \quad c = y.i = -x.j, \quad m = ai + bj + ck,$$

puisque $i \wedge m = x$, $j \wedge m = y$, $k \wedge m = z$ et que

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in W \Longrightarrow u = \lambda x + \mu y + \nu z = (\lambda i + \mu j + \nu k) \wedge m = v \wedge m.$$

(Ceci résulte encore du fait que tout endomorphisme antisymétrique de $\mathbf{R}^3$ est de la forme $v \longmapsto v \wedge m$.)

W est donc inclus dans un espace L de même dimension que lui, qui lui est donc égal. Si $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in W$, en posant *a priori* $v = p \wedge q$, on sait que $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} m.p \\ p \end{pmatrix} \top \begin{pmatrix} m.q \\ q \end{pmatrix}$;

si $\quad p = \lambda i + \mu j + \nu k$, on a $\begin{pmatrix} m.p \\ p \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a \\ i \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} b \\ j \end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix} c \\ k \end{pmatrix}$.

Réciproquement, $\left(\Sigma\lambda\begin{pmatrix} a \\ i \end{pmatrix}\right) \top \left(\Sigma\lambda'\begin{pmatrix} a \\ i \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} m.p \\ p \end{pmatrix} \top \begin{pmatrix} m.q \\ q \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (p \wedge q) \wedge m \\ p \wedge q \end{bmatrix}$ est combinaison linéaire de $\begin{bmatrix} i \wedge m \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ j \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z \\ k \end{bmatrix}$, donc élément de W : $W = F \top F$.

b) Soit i normé engendrant $t(W)$. W admet une base du type $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} j \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix}\right)$, où (i, j, k) est une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$, puisque $0.i = j.i = k.i = 0$, obtenue comme en *a*).